



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024-I**

Trigonometría

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS (PARTE I)





FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS I

I. Nociones previas

Función inyectiva o univalente

Una función $f: X \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es **inyectiva** si para cada par de números distintos, $x_1, x_2 \in X$ se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ejemplo:

$$f = \left\{ \left(\frac{\pi}{5}; \frac{3}{2} \right), (\ln(2); e^{-3}), \left(\tan(44^\circ); \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$

Sí es una función inyectiva

$$g = \left\{ \left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{2} \right), (0; 1), (2\pi; 1), (5; -1), \left(\sin(1); \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \right) \right\}$$

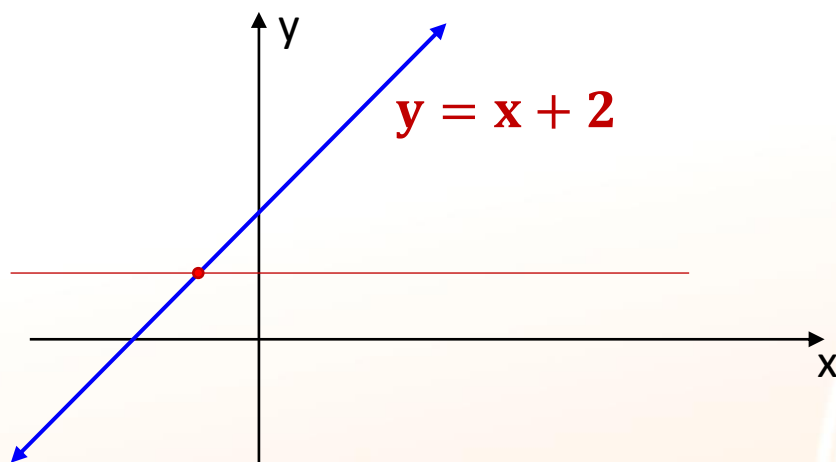
No es una función inyectiva

Nota:

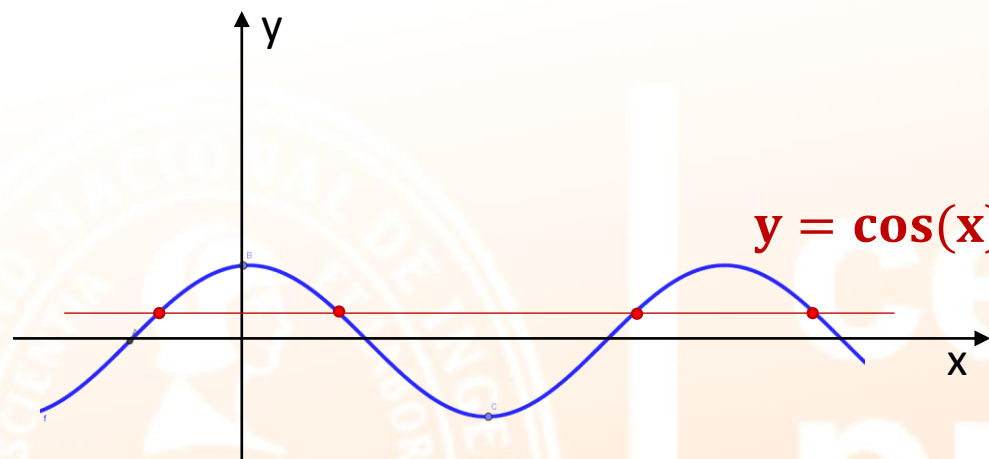
Una función es inyectiva, si para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ se tiene que $x_1 = x_2$.

Observación:

Gráficamente se reconoce a una función inyectiva f , cuando toda recta horizontal intercepta a la gráfica de la función f en no más de un punto.



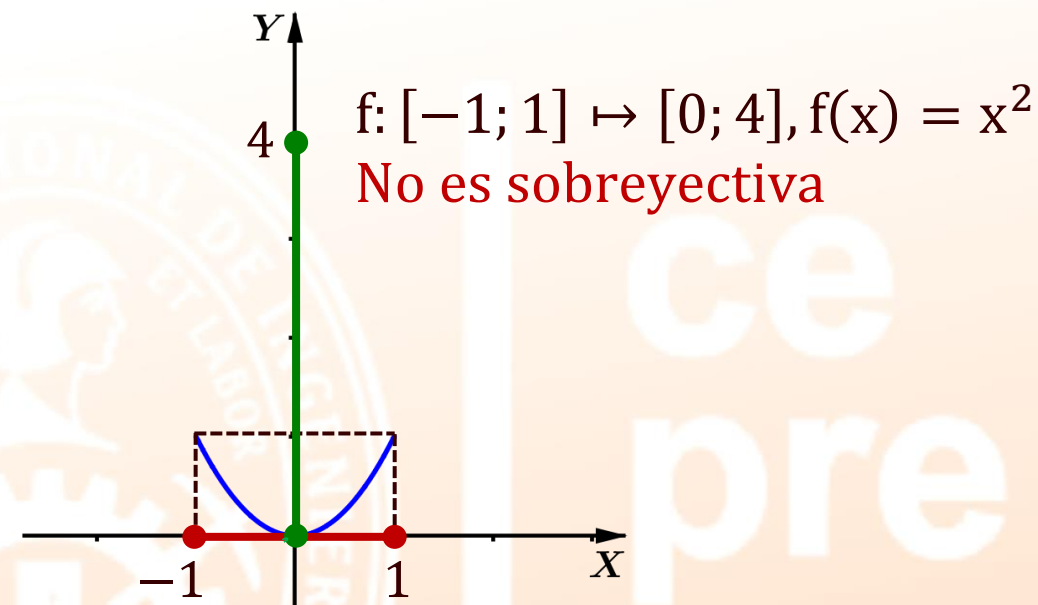
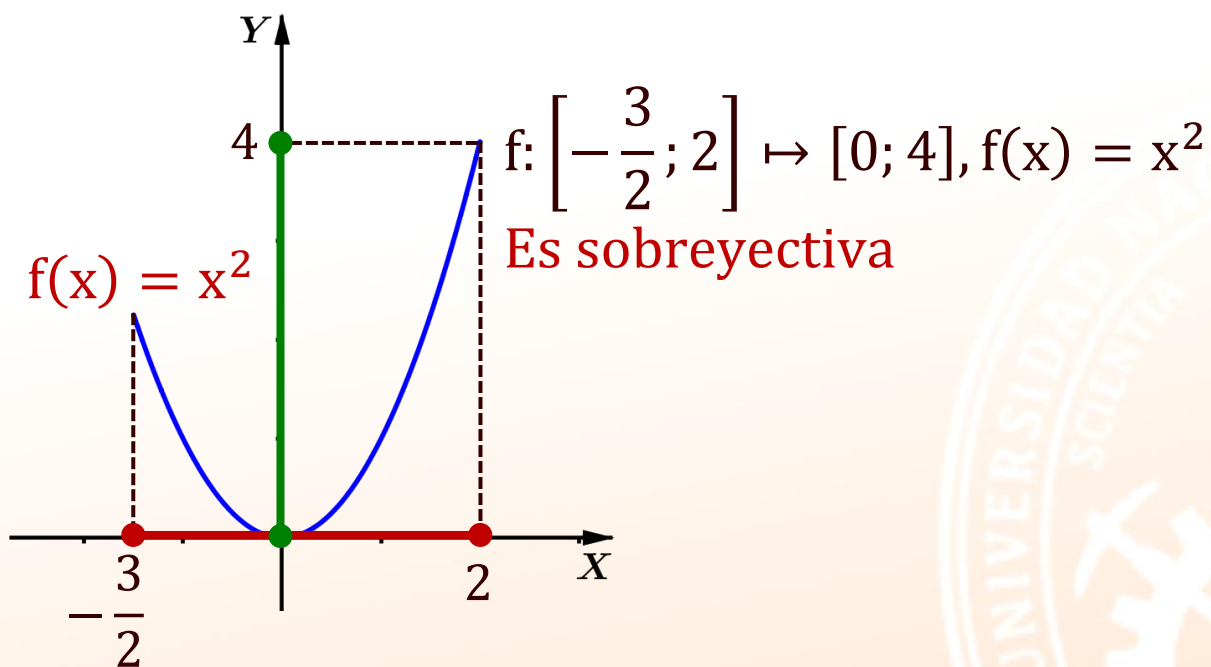
Sí es función inyectiva



No es función inyectiva

Función sobreyectiva o suryectiva

Una función $f: X \subset \mathbb{R} \mapsto Y$ es **sobreyectiva** si para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$.



Función biyectiva

Una función $f: X \subset \mathbb{R} \mapsto Y$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Función Inversa

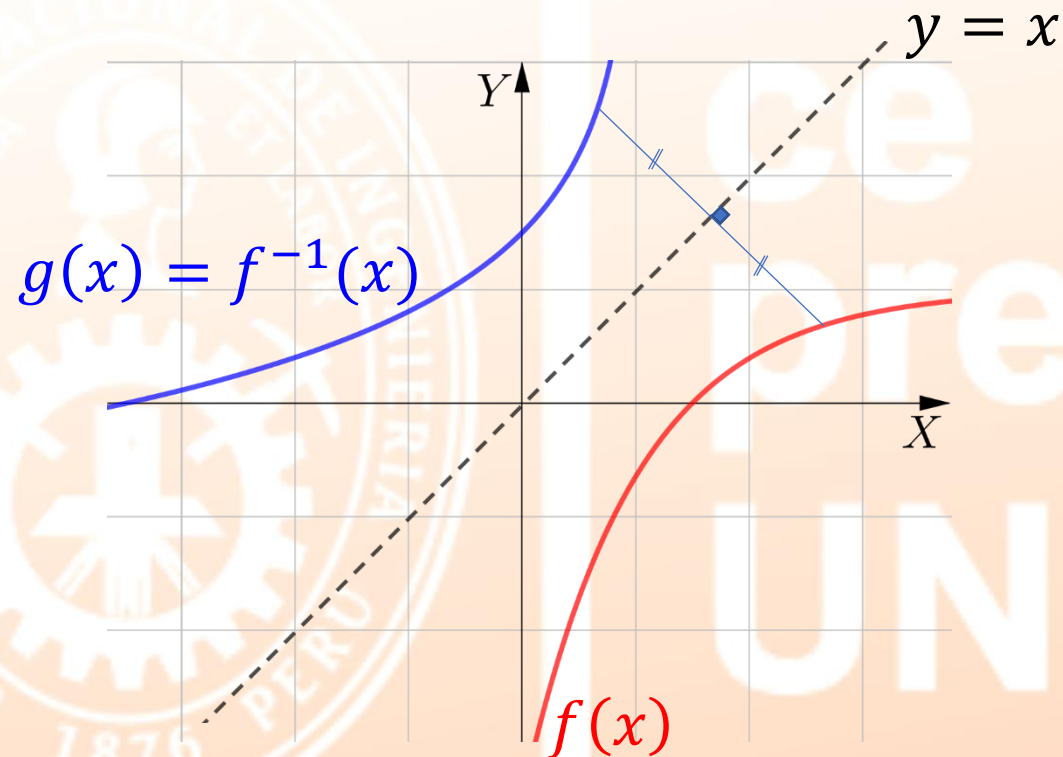
Sea f una función biyectiva, entonces posee función inversa denotada por f^{-1} ó f^* , donde $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^*(y)$ tal que:

$$\text{Dom}(f^*) = \text{Ran}(f)$$

$$\text{Ran}(f^*) = \text{Dom}(f)$$

Observación:

La gráfica de la función inversa f^{-1} es simétrica a la gráfica de f , con respecto a la recta $y = x$.



II. Estudio de las funciones trigonométricas inversas

Introducción

Debido a que las funciones trigonométricas son periódicas, éstas no son inyectivas, por ello para obtener las funciones trigonométricas inversas se debe restringir el dominio a uno en que la función sea inyectiva, a esto lo llamamos obtener la rama principal (esto se debe hacer para la obtención de las seis funciones trigonométricas inversas).

Rama principal

- El dominio restringido D debe hacer cumplir inyectividad para f y el conjunto $\{f(x): x \in D\}$ sea el rango de f .
- El dominio restringido debe contener los menores valores posibles (en valor absoluto de $\text{dom}(f)$).
- Debe acercarse al eje de las **ordenadas** por la derecha.

Cuadro de dominios restringidos para las f.t. inversas

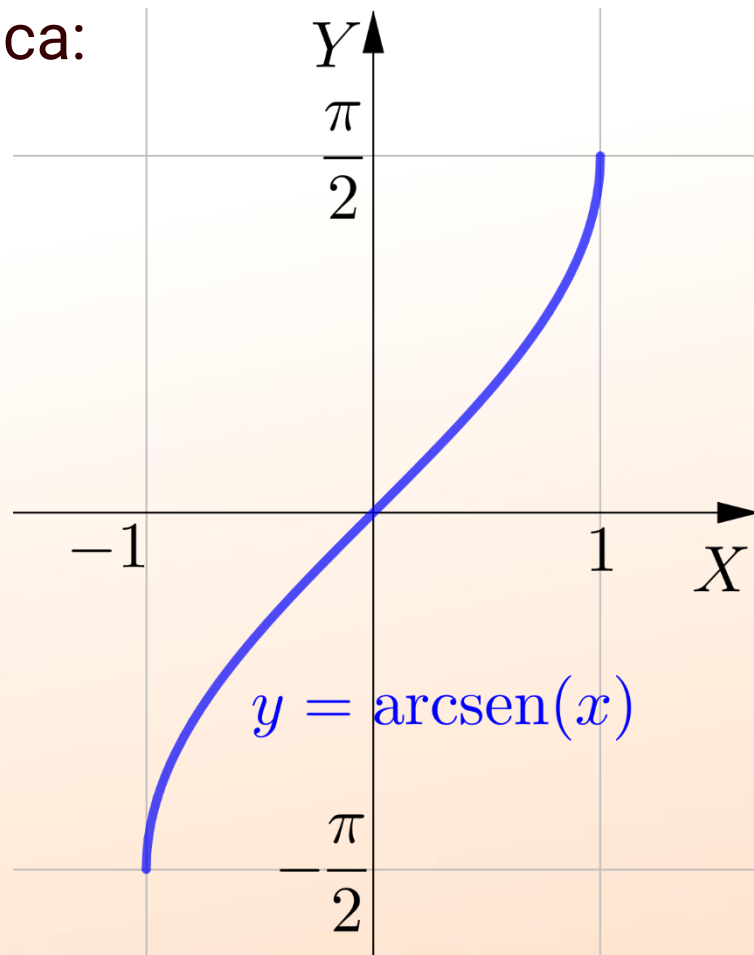
Función	Dominio Restringido	Rango
$y = \text{sen}(x)$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1; 1]$
$y = \text{cos}(x)$	$[0; \pi]$	$[-1; 1]$
$y = \text{tan}(x)$	$\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$\mathbb{R}$
$y = \text{cot}(x)$	$\langle 0; \pi \rangle$	$\mathbb{R}$
$y = \text{sec}(x)$	$[0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$
$y = \text{csc}(x)$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$	$\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$

II.1. FT seno inverso o arco seno:

$$f.t(\text{arco seno}) = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \arcsen(x) \leftrightarrow \text{sen}(y) = x; x \in [-1; 1]; y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

Notación: $\arcsen$, sen^{-1} .

Gráfica:



Consideraciones:

* $\text{Dom}(f) = [-1; 1]$

* $\text{Ran}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

* Es una función impar:

$$\forall x \in [-1; 1]: \arcsen(-x) = -\arcsen(x)$$

* Es una función creciente en: $-1 < x < 1$

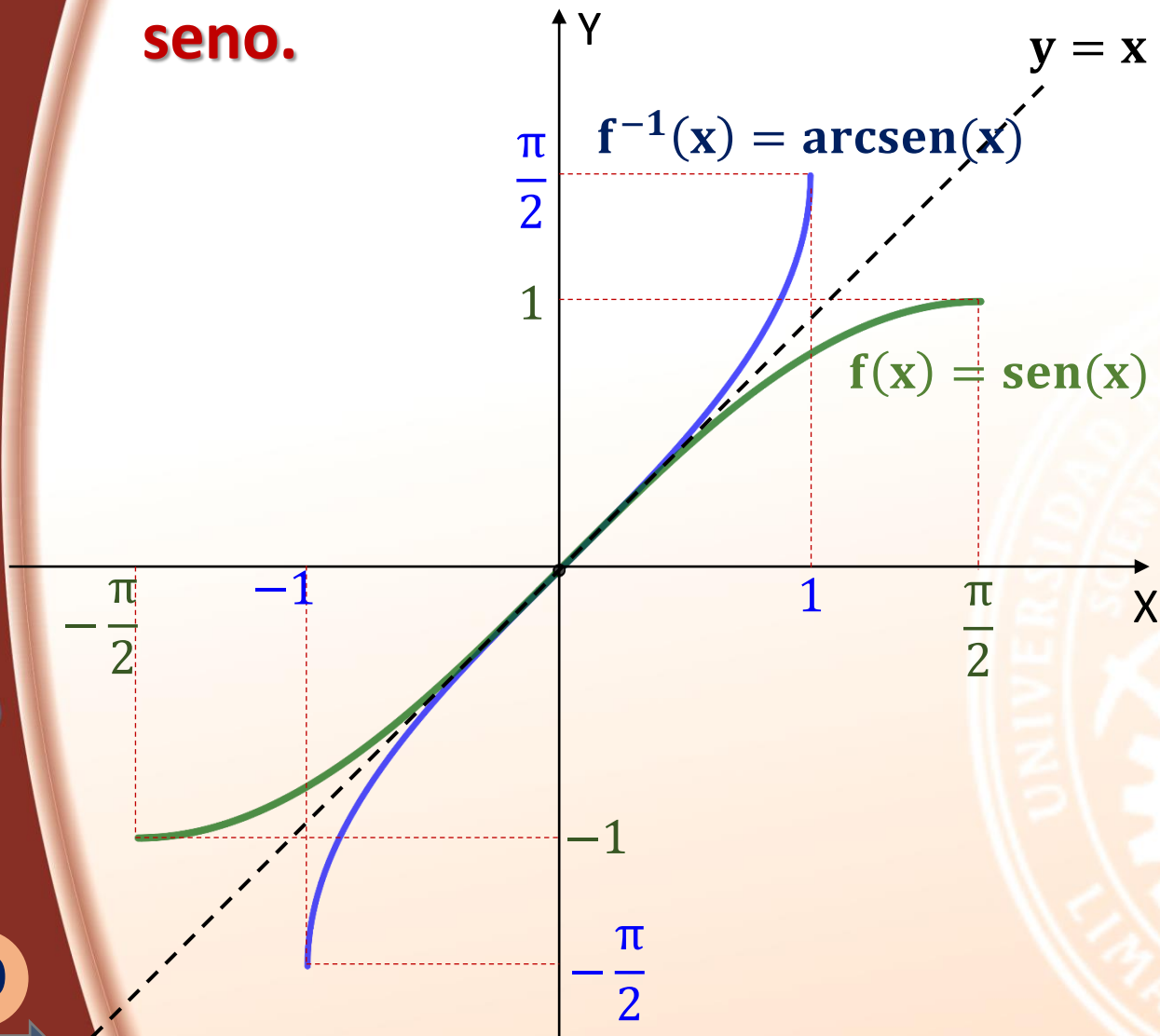
Si $-1 < x_1 < x_2 < 1$:

$$\arcsen(x_1) < \arcsen(x_2)$$

* Si: $\theta = \arcsen(\Delta)$

$$\begin{cases} -1 \leq \Delta \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Gráfica de la función **seno** versus la gráfica de la función **arco seno**.



Consecuencia

$$\text{Si: } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \text{arcsen}(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

Por ejemplo:

$$* \text{arcsen}(0) = 0$$

$$* \text{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$* \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$* \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$* \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Si: } -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsen}(x) \leq 0$$

Por ejemplo:

$$* \text{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$* \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$* \text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$* \text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

PROBLEMA 01

Dada la función f , definida por $f(x) = 3\sin^{-1}(x) + 4\sin^{-1}(2x)$

Determine el dominio de la función.

CLAVE E

A) $[-\sin(1); 1]$ B) $[-1; 1]$ C) $[-1; \sin(1)]$ D) $[0; \sin(1)]$

E) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

PROBLEMA 02

Dada la función f , definida por $f(x) = 3\arcsen\left(\frac{1}{x}\right) - 2\sqrt{4 - x^2}$
determine su dominio.

CLAVE C

A) $|x| \geq 1$ B) $|x| \leq 2$ C) $1 \leq |x| \leq 2$ D) $1 \leq |x| \leq 3$ E) $2 \leq |x| \leq 3$

PROBLEMA 03

Dada la función f , definida por

$$f(x) = \frac{6}{\pi} \arcsen \left(\frac{\sen^4(x) - \cos^4(x)}{2} \right) + 2$$

Determine el rango de la función.

CLAVE A

A) $[1; 3]$

B) $[1; 4]$

C) $[1; 5]$

D) $[1; 6]$

E) $[2; 5]$

PROBLEMA 04

Sea la función f , definida por

$$f(x) = \arcsen \left(\sqrt{x + \frac{1}{2}} \right) + \arcsen \left(\sqrt{x - \frac{1}{2}} \right)$$

determine el rango de la siguiente función.

CLAVE D

A) $\{0\}$

B) $\left\{ \frac{\pi}{8} \right\}$

C) $\left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$

D) $\left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

E) π

PROBLEMA 5

Determine el rango de la unción, definida por: $f(x) = \arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + \arcsen\left(\frac{x}{4}\right)$

- A) $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$ B) $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ C) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ D) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ E) $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

CLAVE B

PROBLEMA 06

Dada la función f, definida por $f(x) = \arcsen\left(\frac{|\sen(x)| + |\cos(x)|}{2}\right)$

Determine su rango .

- A) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$ B) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ C) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ D) $[-\pi; \pi]$ E) $[0; \pi]$

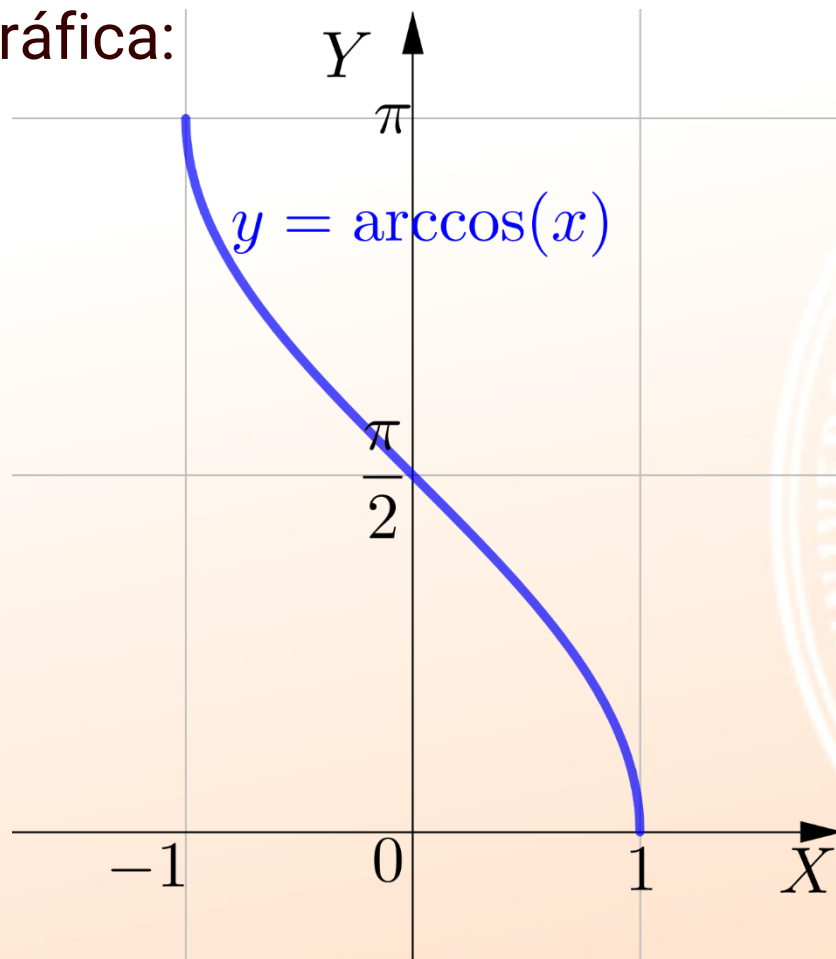
CLAVE A

II.2. FT coseno inverso o arco coseno:

$$f.t(\text{arco coseno}) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \arccos(x) \leftrightarrow \cos(y) = x; x \in [-1; 1]; y \in [0; \pi]\}$$

Notación: $\arccos$, $\cos^{-1}$.

Gráfica:



Consideraciones:

* $\text{Dom}(f) = [-1; 1]$

* $\text{Ran}(f) = [0; \pi]$

* No es una función par ni impar:

$$\forall x \in [-1; 1]: \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

* Es una función decreciente:

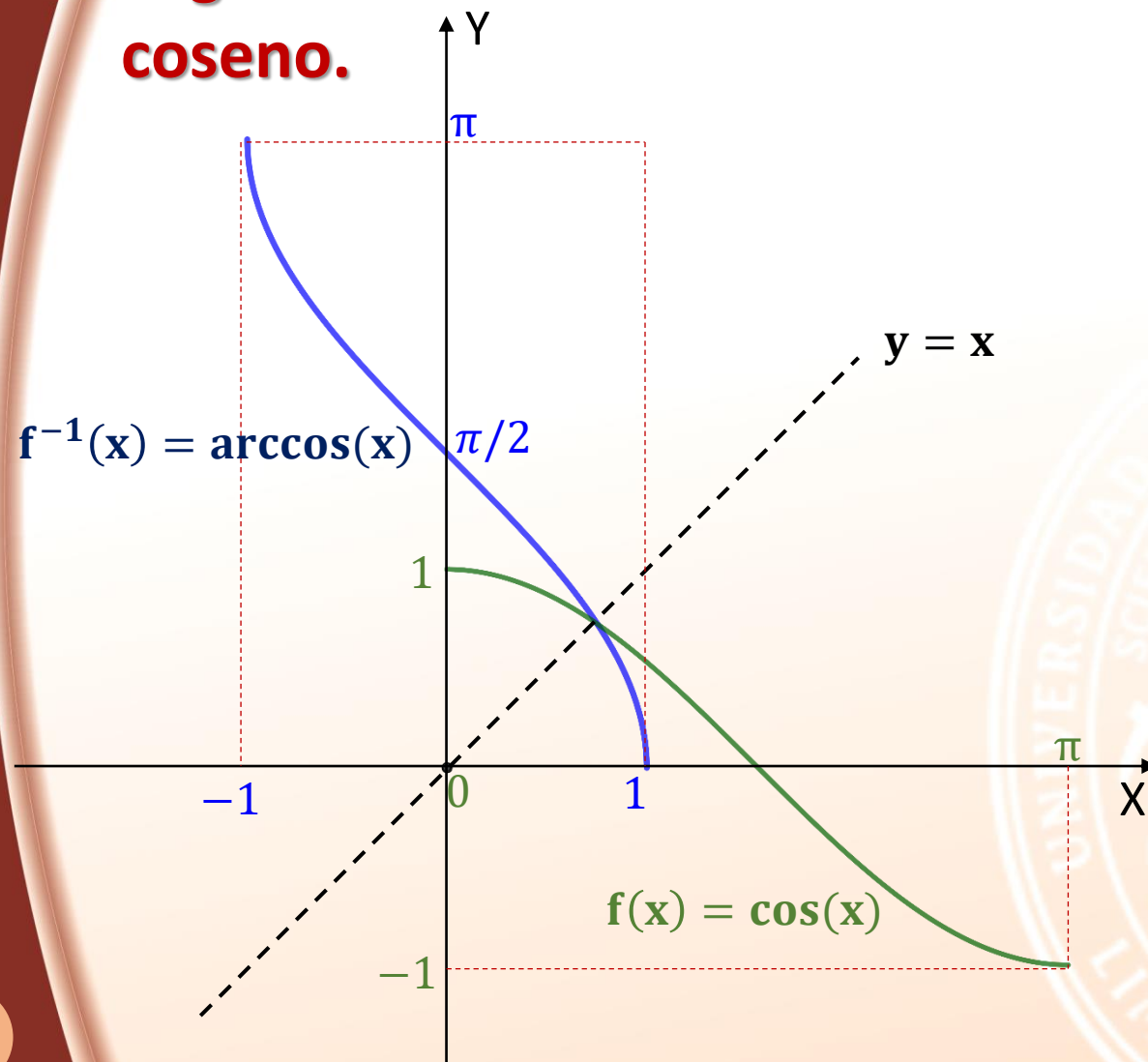
Si $-1 < x_1 < x_2 < 1$:

$$\arccos(x_1) > \arccos(x_2)$$

* Si: $\theta = \arccos(\Delta)$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \Delta \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$

Gráfica de la función **coseno** versus la gráfica de la función **arco coseno**.



Consecuencia

$$\text{Si: } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \arccos(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

Por ejemplo:

$$* \arccos(1) = 0$$

$$* \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$* \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$* \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$* \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Si: } -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \arccos(x) \leq \pi$$

Por ejemplo:

$$* \arccos(-1) = \pi$$

$$* \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$* \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$* \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

PROBLEMA 7

Sea la función f , definida por

$$f(x) = \frac{2\pi}{\operatorname{sen}(2\arccos(2x))} + \frac{4\pi}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

CLAVE C

Determine el dominio de la función f

A) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

C) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] - \{0\}$

E) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] - \left\{\frac{-\sqrt{3}}{4}; -\frac{1}{4}\right\}$

B) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] - \left\{\frac{1}{4}\right\}$

D) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] - \left\{\frac{-\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

PROBLEMA 08

Sea la función f , definida por

$$f(x) = \frac{|\arccos(x)| + \frac{2\pi}{3}}{|\arccos(x)| + \frac{\pi}{3}}$$

Determine el rango de la función f :

- A) $\left[\frac{5}{4}; 2\right]$ B) $[1; 2]$ C) $\left[0; \frac{5}{4}\right]$ D) $\left[-\frac{5}{4}; 2\right]$ E) $[1; 3]$

CLAVE A

PROBLEMA 09

Dada la función f , definida por

$$f(x) = \sqrt{3x + 5x^2} + \arccos(\sqrt{4 + 5x})$$

determine el dominio de la siguiente función:

- A) $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{4}{5}\right]$ B) $\left[0; \frac{3}{4}\right]$ C) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ D) $\left[-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right]$ E) $\left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$

CLAVE D

PROBLEMA 10

Sea la función f , definida por $f(x) = \frac{\pi}{|\arccos(x)| + \pi} + \frac{3\pi}{|\arccos(x)| + 2\pi}$

CLAVE A

Determine el rango de la función f :

- A) $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$ B) $\langle 0; 2]$ C) $\left[\frac{3}{2}; 4\right)$ D) $[2; \infty)$ E) $\langle 1; 4]$

PROBLEMA 11

Sea la función f , definida por $f(x) = 3\arccos\left(\frac{1}{\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x)}\right)$

CLAVE E

determine el rango de la función f :

- A) $[0; \pi]$ B) $[\pi; 2\pi]$ C) $[2\pi; 3\pi]$ D) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup [\pi; 2\pi]$ E) $[0; \pi] \cup [2\pi; 3\pi]$

PROBLEMA 12

Sea la función f , definida por $f(x) = \sqrt{5\arcsen(x) - \arccos(|x|)}$

Determine su dominio .

CLAVE A

- A) $[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}; 1]$ B) $[\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; 1]$ C) $[\frac{1 - \sqrt{5}}{4}; 1]$ D) $[1; \frac{\sqrt{5} - 1}{4}]$ E) $[-1; \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}]$

PROBLEMA 13

Sea la función f , definida por $f(x) = \sin^{-1}(\frac{2}{4x - 5}) - \cos^{-1}(\frac{3}{x - 4})$
determine su dominio.

CLAVE B

- A) $\langle -\infty; -2] \cup [2; \infty \rangle$ C) $\langle -\infty; -7] \cup [\frac{3}{4}; \infty \rangle$ E) $[\frac{3}{4}; 2] \cup [7; \infty \rangle$
B) $\langle -\infty; \frac{3}{4}] \cup [7; \infty \rangle$ D) $\langle -\infty; 2] \cup [7; \infty \rangle$

PROBLEMA 14

Sea la función f , definida por

$$f(x) = 2 \arccos(x) + 3 \arcsen(x) - 4 \arccos(2x)$$

Determine el rango de la función f :

CLAVE B

- A) $\left[-\frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ B) $\left[-\frac{19\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$ C) $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ D) $\left[-\frac{13\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ E) $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right]$

PROBLEMA 15

Indicar un intervalo de monotonía creciente de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\arcsen(\cos(x))}{\arccos(\sen(x))}$$

CLAVE A

A) $\langle k\pi; (k+1)\pi \rangle$

B) $\left\langle \frac{k\pi}{2}; \frac{(k+1)\pi}{2} \right\rangle$

C) $\left\langle \frac{k\pi}{2}; \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{k\pi}{2}; \frac{(k+1)\pi}{2} \right\rangle$

E) $\left\langle \frac{(1+4k)\pi}{2}; \frac{(4k+5)\pi}{2} \right\rangle$

PROBLEMA 16

Determine el dominio de la función f definida por:

$$f(x) = \frac{\arcsen(\sqrt{2x-x^2})}{\arccos(\sqrt{x^2-2x})}$$

A) $\{0,2\}$

B) $[0; 2]$

C) $[1 - \sqrt{2}; 2]$

D) $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$

E) $\langle 0; 2 \rangle$

CLAVE A

PROBLEMA 17

Sea la función f , definida por
Determine el rango de la función f :

$$f(x) = |\arccos(x)| + \arcsen(x) + |\arctan(x)|$$

CLAVE A

A) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

B) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

C) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

D) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right]$

E) $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$

PROBLEMA 18

Sea la función f , definida por
determine el dominio de la función f :

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2x-1}{5}\right) + \frac{2}{\pi} \arctan(1 + \sqrt{x-2})$$

CLAVE B

A) $[1; 2]$

B) $[2; 3]$

C) $\left[2; \frac{3}{2}\right]$

D) $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$

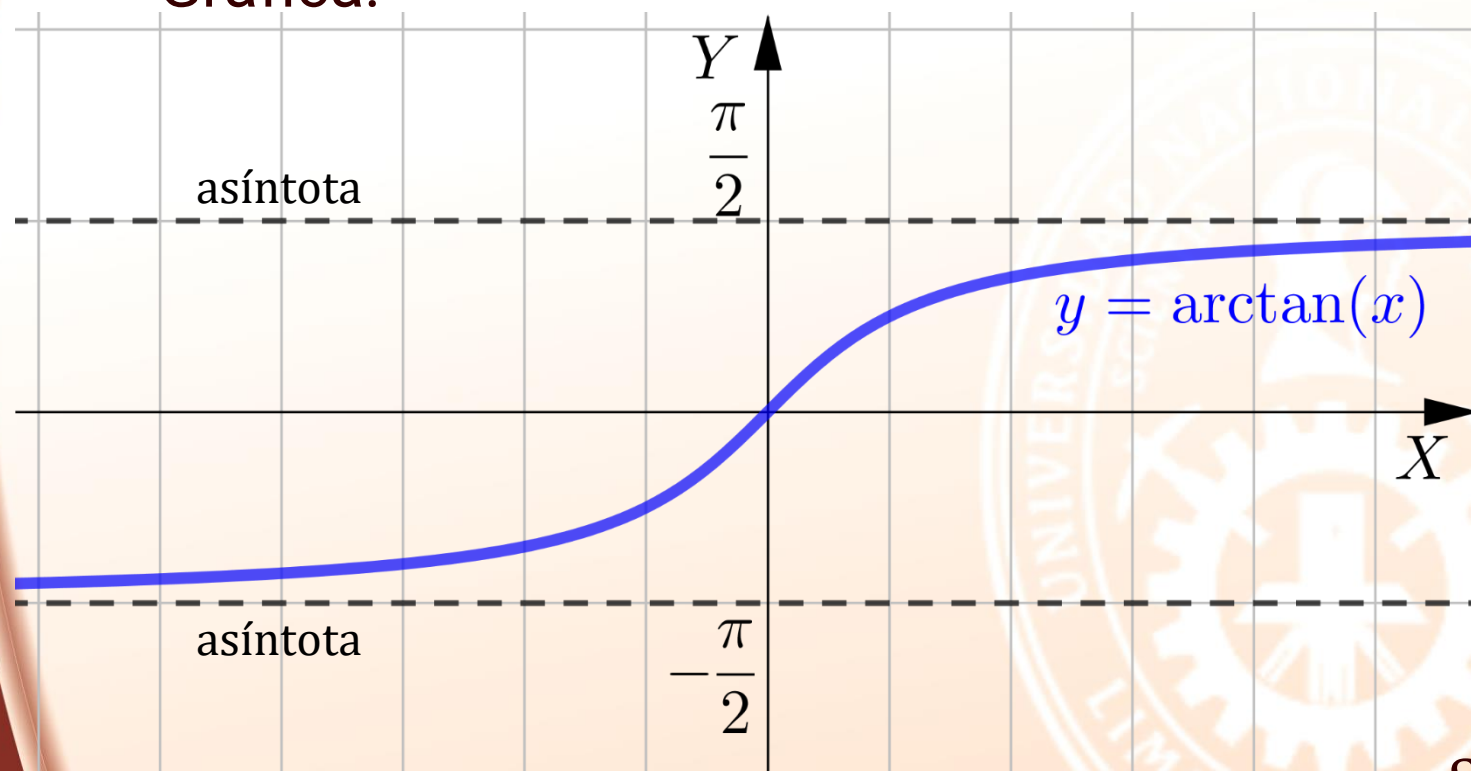
E) $\left[2; \frac{7}{3}\right]$

II.3. FT tangente inverso o arco

$$f.t(\text{arco tangente}) = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = \arctan(x) \leftrightarrow \tan(y) = x; x \in \mathbb{R}; y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \right\}$$

Notación: $\arctan(x)$, $\tan^{-1}(x)$.

Gráfica:



Consideraciones:

* $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

* $\text{Ran}(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

* Es una función impar:

$\forall x \in \mathbb{R}:$

$\arctan(-x) = -\arctan(x)$

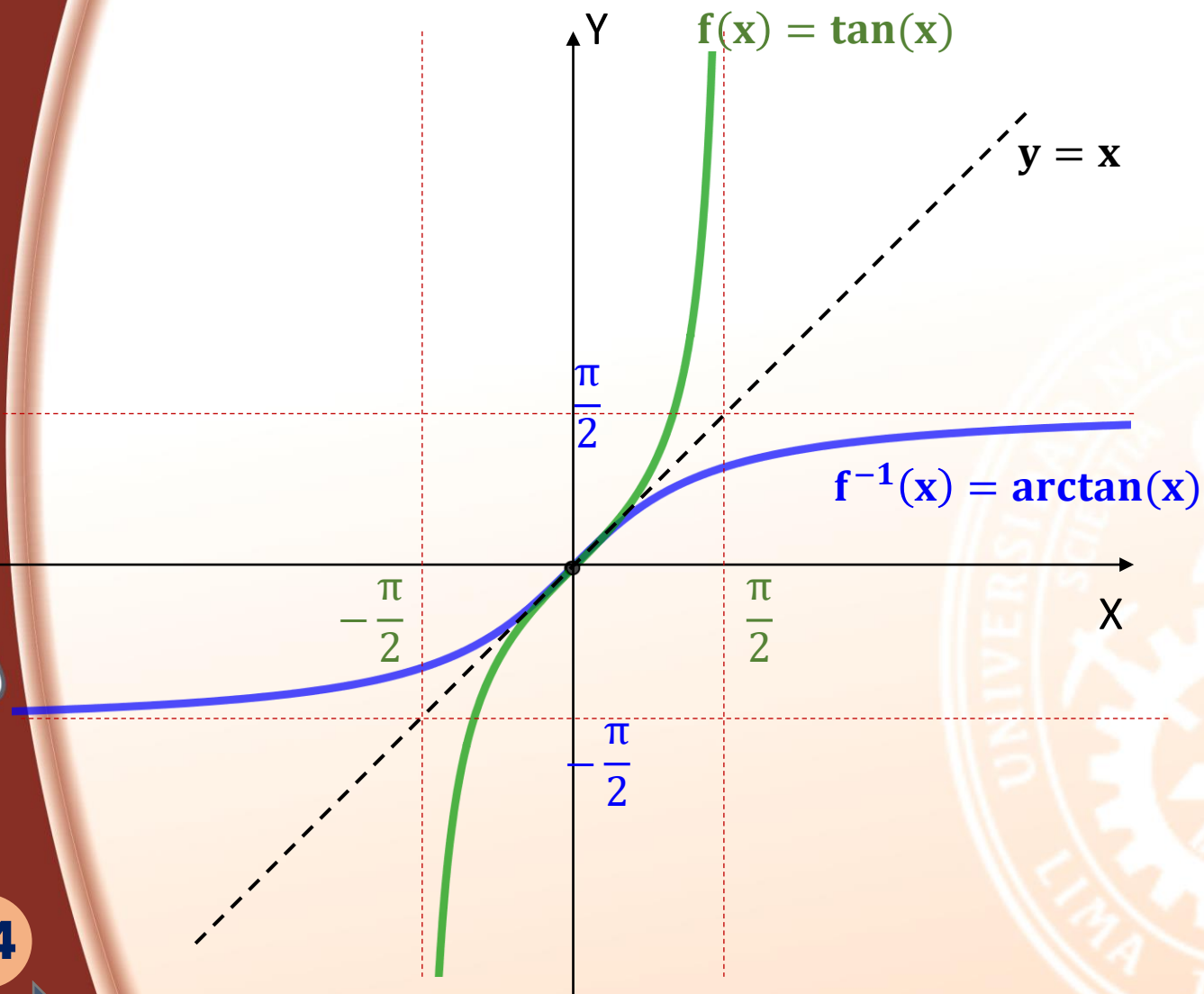
* Es una función creciente:

Si $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$:

$\arctan(x_1) < \arctan(x_2)$

* Si: $\theta = \arctan(\Delta) \begin{cases} -\infty < \Delta < +\infty \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Gráfica de la función **tangente** versus la gráfica de la función **arco tangente**.



Consecuencia

$$\text{Si: } 0 \leq x < +\infty \Rightarrow 0 \leq \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$$

Por ejemplo:

$$* \arctan(0) = 0$$

$$* \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$* \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$* \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$* \arctan(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Si: } -\infty < x \leq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \arctan(x) \leq 0$$

$$* \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad * \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$* \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$* \arctan(\sqrt{3} - 2) = -\frac{\pi}{12}$$

PROBLEMA 19

Sea la función f , definida por

$$f(x) = \arcsen(x) - \arccos(x) + \arctan(x)$$

Determine el rango de la función f y luego calcule la suma del máximo con el mínimo

A) $-\pi$

B) $-\frac{\pi}{2}$

C) 0

D) $\frac{\pi}{4}$

E) 2π

CLAVE A

PROBLEMA 20

Sea la función f , definida por

$$f(x) = \sqrt{2\arctan\left(\frac{x}{6}\right) - \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2\arcsen\left(\frac{x}{8}\right) - \frac{\pi}{3}}$$

determine el dominio de la función f :

A) $[6; \infty)$

B) $[6; 8]$

C) $[4; 8]$

D) $[2; 8]$

E) $[2; 6]$

CLAVE A

PROBLEMA 21

Sea la función f , definida por

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2x+1}{5}\right) + \frac{2}{\pi} \arctan(1 + \sqrt{2-x})$$

determine el dominio de la función f :

CLAVE D

A) $[1; 2]$

B) $[2; 3]$

C) $[-2; 0]$

D) $[-3; 2]$

E) $[-2; 2]$

PROBLEMA 22

Sea la función f , definida por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sin(7x) + \sqrt{3}\cos(7x)}{2}\right)$$

Determine el rango de la función f :

CLAVE E

A) $[0; \pi]$

B) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

C) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

D) $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$

E) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

PROBLEMA 23

Sea la función f , definida por
Determine el rango de la función f :

$$f(x) = 2 \arctan(x) + \frac{\pi}{6}$$

CLAVE E

- A) $[0; \pi]$ B) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ C) $\left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$ D) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$ E) $\left\langle -\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\rangle$

PROBLEMA 24

Sea la función f , definida por
determine el rango de la función f :

$$f(x) = \sqrt{\arctan(x) - \frac{\pi}{4} + \arcsen(x)}$$

CLAVE E

- A) $[-2; 2]$ B) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ C) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle$ D) $\left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ E) $\left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$